

## GONIOMETRIA

Gli angoli in trigonometria si misurano prevalentemente in gradi sessagesimali ed in radianti:

**GRADO**: è la 360ma parte dell'angolo giro

**RADIANTE**: è l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Se  $\rho$  è la misura dell'angolo in radianti ed  $\alpha$  quella in gradi, per passare da un sistema di misura

all'altro si utilizza la formula  $\rho : \pi = \alpha : 180^\circ$ .

$$\rho = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot \rho}{\pi}$$

### CORRISPONDENZE PRINCIPALI TRA GRADI E RADIANTI

GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

### CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

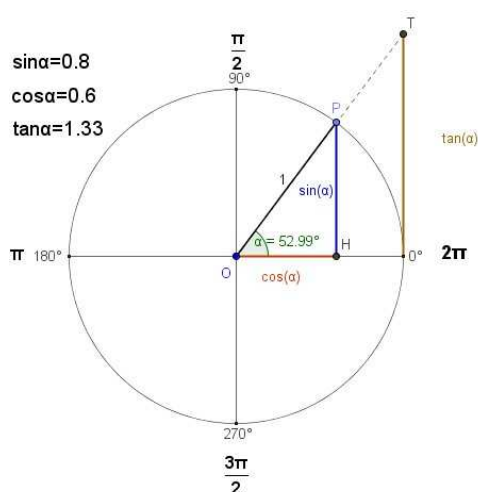
La circonferenza goniometrica è quella avente il centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio unitario; la sua equazione è  $x^2 + y^2 = 1$ .

In essa un punto P di coord. (x;y) è individuato

da un'ascissa e da un'ordinata  $x = \cos \alpha$   
 $y = \sin \alpha$  con  $\alpha$  misurato in senso orario a partire dall'asse y.

Sostituendo nell'equazione della circonferenza si ha

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  **1° relazione fondamentale della goniometria.**

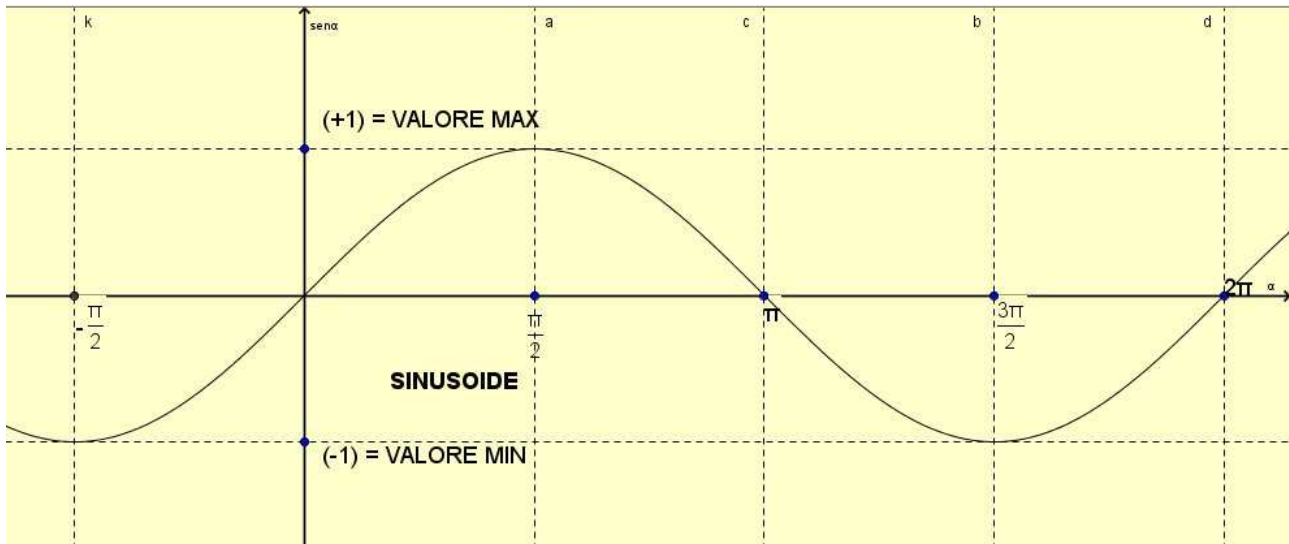


## VARIAZIONE E PERIODICITA' DEL SENO

Quando  $\alpha$  cresce oltre i  $360^\circ$ , i valori del seno e del coseno si ripetono periodicamente; diremo quindi che il seno ed il coseno sono funzioni periodiche con periodo uguale a  $360^\circ$

**Variazione**  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow |\sin \alpha| \leq 1$

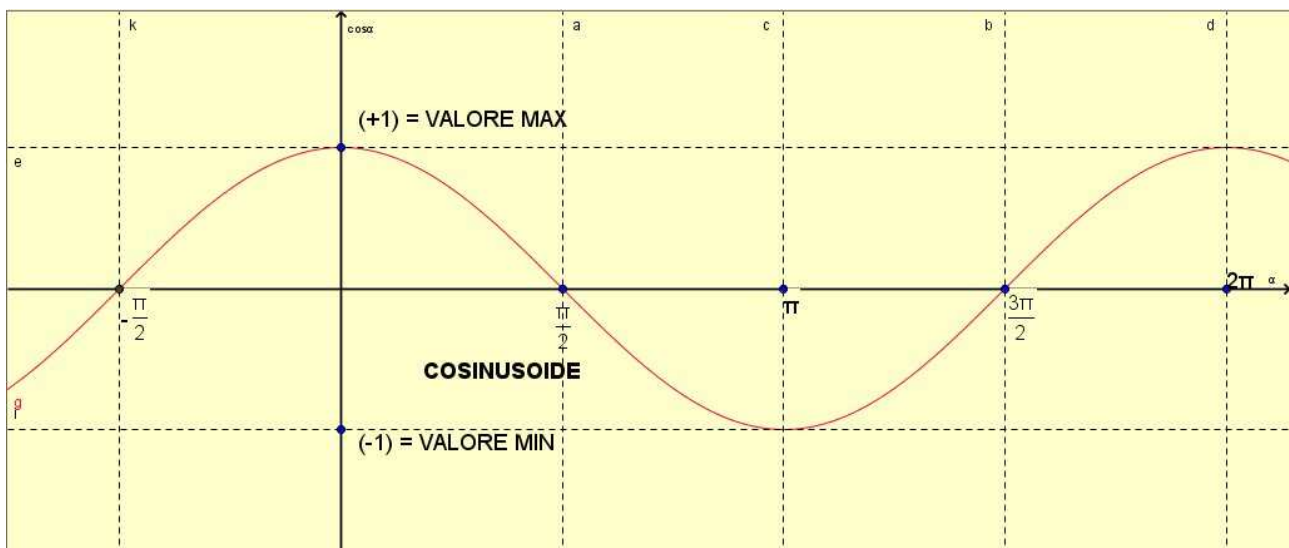
**Periodicità**  $\sin(\alpha + k360^\circ) = \sin \alpha$  con k un qualunque n° intero positivo,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$  dopo un angolo giro i valori di seno si ripetono



## VARIAZIONE E PERIODICITA' DEL COSENO

**Variazione**  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow |\cos \alpha| \leq 1$

**Periodicità**  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$  dopo un angolo giro i valori di cos α si ripetono

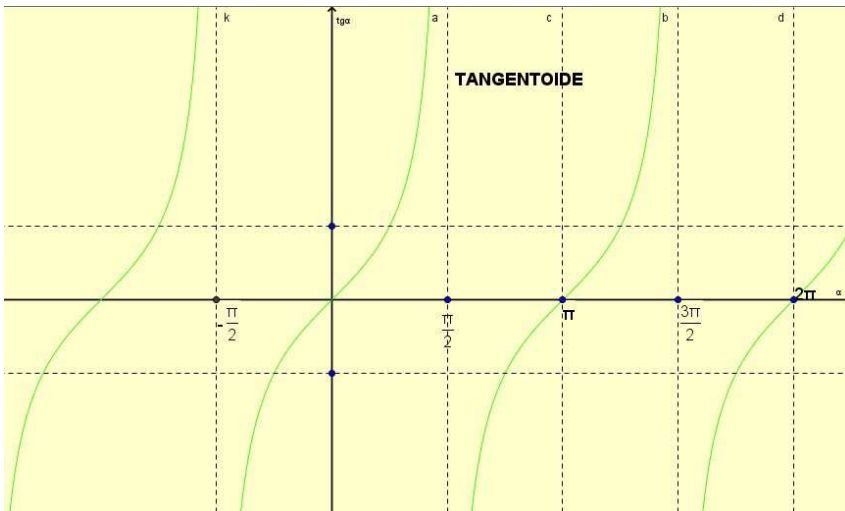


## VARIAZIONE E PERIODICITA' DELLA TANGENTE

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{2° relazione fondamentale della goniometria}$$

**Variazione**  $tg\alpha$  varia tra  $(-\infty; +\infty)$  -  $\left\{\pm k \frac{\pi}{2}\right\}$  infatti non è definita per  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

**Periodicità**  $tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$  dopo un angolo piatto i valori si ripetono

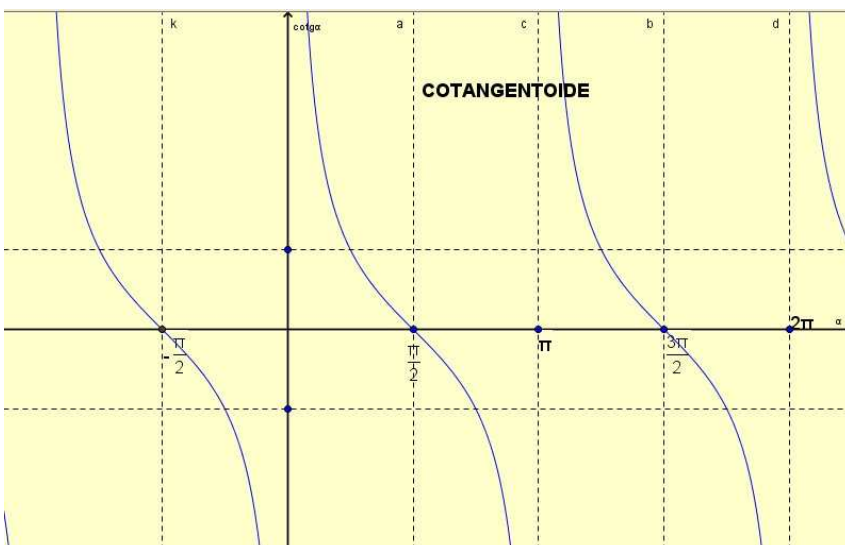


## VARIAZIONE E PERIODICITA' DELLA COTANGENTE

$$\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

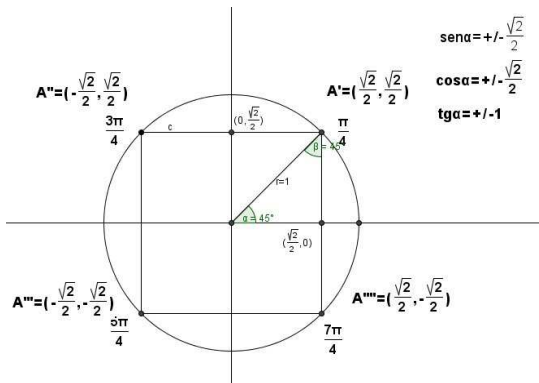
**Variazione**  $\cot g\alpha$  varia tra  $(-\infty; +\infty)$  -  $\{\pm k\pi\}$  infatti ma non è definita per  $\alpha = k\pi$

**Periodicità**  $\cot g(\alpha + k\pi) = \cot g\alpha$  dopo un angolo piatto i valori si ripetono.

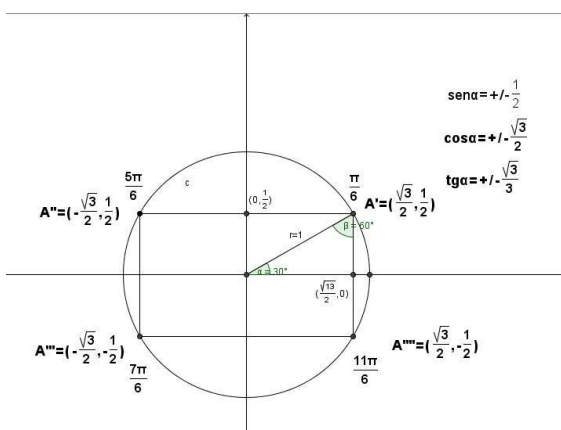


## FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

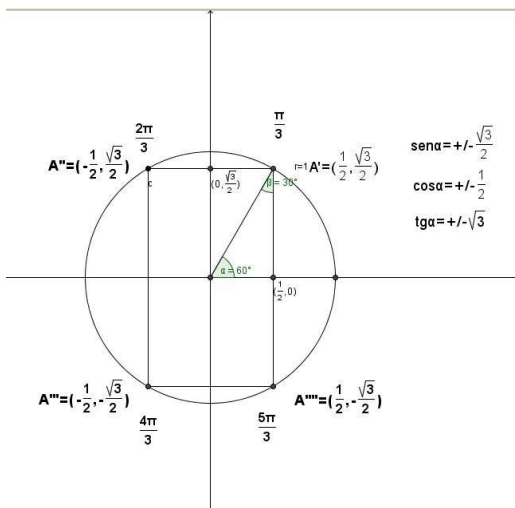
Se  $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots \operatorname{tg} 45^\circ = 1$



Se  $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \dots\dots\dots \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Se  $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \dots\dots\dots \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$



## RELAZIONI FONDAMENTALI TRA LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Da  $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  si ottengono  $\text{sen } \alpha$  e  $\cos \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$  :

$$\text{a) se è noto } \text{sen } \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} \\ \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}} \end{cases}$$

$$\text{b) se è noto } \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \text{tg } \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$\text{c) se è noto } \text{tg } \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} \\ \text{sen } \alpha = \pm \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} \end{cases}$$

## FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Sappiamo che  $\begin{matrix} x = \cos \alpha \\ y = \text{sen } \alpha \end{matrix}$  ; il problema da risolvere è quello di determinare gli archi o angoli che sono associati a certi valori noti di seno, coseno. Per conoscerli bisogna invertire tali funzioni, e ciò si può fare solo se si restringe la variazione di tali funzioni a certi intervalli finiti dell'angolo, in quanto esse sono periodiche. Le funzioni inverse sono arcoseno, arcocoseno e arcotangente.

Calcolare  $\alpha = \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$  si riduce a dare risposta alla seguente domanda "trovare il valore

dell'angolo  $\alpha$  il cui coseno è  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  . La risposta è  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  .

### FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DI SENO, COSENO E TANGENTE

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{valida se } \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

### FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{da cui } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad e \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{valida se } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

### FORMULE PARAMETRICHE

$$\text{Dalle } \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad e \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{valida se } \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$\text{si ottiene, posto } \tan \frac{\alpha}{2} = t \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \quad e \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

### FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\text{valida se } \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

Il segno si sceglie in base al quadrante in cui cade il punto associato all'angolo  $\frac{\alpha}{2}$

La formula della tangente può essere espressa anche nei seguenti modi:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{con } \alpha \neq k\pi$$

### FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

### FORMULE PARAMETRICHE

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$